Lineare Regression

In diesem Anwendungsbeispiel definieren wir lineare Ausgleichsprobleme und zeigen, wie diese unter Verwendung eines linearen Programms gelöst werden können. Als explizites Beispiel präsentieren wir das Ausgleichsproblem zur linearen Regression, welches auch zur Regression beliebiger Polynome verallgemeinert werden kann.

1 Lineare Ausgleichsprobleme

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sowie ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$. Dabei gelte $m > n$ und der Rang von A sei gleich n. Unter diesen Annahmen besitzt das lineare Gleichungssystem

$$A \cdot x \;=\; b$$

keine Lösung. Mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ ist man daher häufig daran interessiert, eine Lösung der Optimierungsaufgabe

$$\min \;\|A\cdot x - b\|_\infty, \qquad \text{sodass} \qquad x \;\in\; \mathbb{R}^n \tag{1}$$

zu bestimmen. Eine derartige Optimierungsaufgabe wird als ***lineares Ausgleichsproblem*** bezeichnet.

Schließlich lässt sich ein lineares Ausgleichsproblem unter Verwendung der Maximumsnorm in das folgende äquivalente lineare Programm überführen:

$$\begin{array}{llrcll}
\min\; t, & \text{sodass} & a_i^\top \cdot x - t & \leq & b_i & \text{für alle } i \in \{1,\ldots,m\},\\
 & & a_i^\top \cdot x + t & \geq & b_i & \text{für alle } i \in \{1,\ldots,m\},\\
 & & x_j & \lesseqgtr & 0 & \text{für alle } j \in \{1,\ldots,n\},\\
 & & t & \geq & 0. &
\end{array}$$

Dieses lineare Programm besitzt $n+1$ Variablen sowie $2\cdot m$ Nebenbedingungen.

2 Beispiel lineare Regression

Als explizites Anwendungsbeispiel untersuchen wir die ***lineare Regression***. Gegeben seien m Messpunkte

$$m_i \;=\; (u_i,\, z_i) \qquad \text{für } i = 1, \ldots, m.$$

Dabei sei bekannt, dass die Messpunkte (theoretisch) alle auf einer Geraden

$$f(x) \;=\; w \cdot x + e$$

liegen. Aufgrund von Messfehlern ist dies allerdings nur theoretisch der Fall, praktisch sind alle Messpunkte fehlerbehaftet. Man möchte daher die Steigung w und den Achsenabschnitt e derart bestimmen, sodass

$$\max_{i=1,\ldots,m} \Big| f(u_i) - z_i \Big| \;=\; \max_{i=1,\ldots,m} \Big| w \cdot u_i + e - z_i \Big|$$

minimiert wird. Unter Verwendung des Vektors $b = (z_1, \ldots, z_m) \in \mathbb{R}^m$ sowie der Matrix

$$A \;=\; \begin{pmatrix} u_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ u_m & 1 \end{pmatrix} \;\in\; \mathbb{R}^{m \times 2}$$

erhalten wir schließlich das lineare Ausgleichsproblem

$$\min \; \|A \cdot x - b\|_\infty \;=\; \min \max_{i=1,\ldots,m} \Big| u_i \cdot w + e - z_i \Big|, \qquad \text{sodass} \qquad x \;=\; (w, e) \;\in\; \mathbb{R}^2,$$

welches wir wie zuvor beschrieben unter Verwendung eines linearen Programms lösen können.

Abb. 1 zeigt ein Beispiel mit $m = 100$ Messpunkten, wobei zufällige Messfehler generiert wurden. Die Lösung des zugehörigen Ausgleichsproblems liefert schließlich die Lösung der linearen Regression.

?

Aufgabe 2.1 Übertrage das Verfahren auf die Regression einer quadratischen Funktion

$$f(x) \;=\; z \cdot x^2 + w \cdot x + e.$$

Formuliere auch dazu ein entsprechendes lineares Programm.

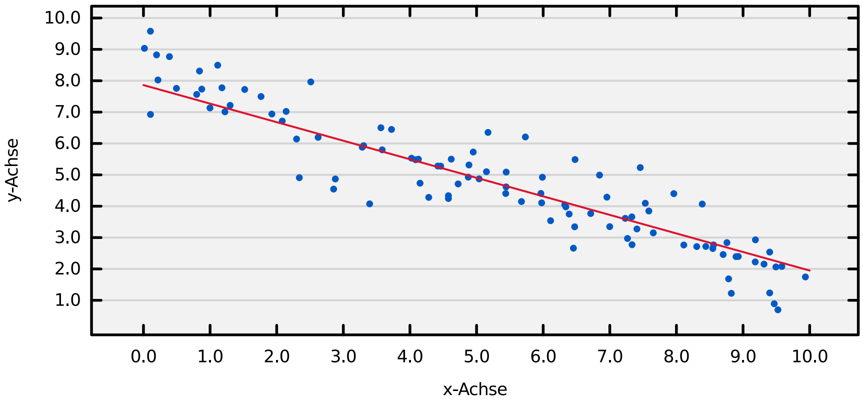

Abb. 1 Beispiel zur linearen Regression mit $m = 100$ Messpunkten (blau), wobei zufällige Messfehler generiert wurden. Die Lösung (rot) wurde unter Verwendung des zugehörigen linearen Ausgleichsproblems berechnet