

Klassisches Transportproblem

Das *Transportproblem* hat das Ziel, Transportkosten zwischen Angebots- und Nachfrageorten zu minimieren. Im einfachsten Falle nehmen wir dabei an, dass in Summe Angebot und Nachfrage jeweils genau ausgeglichen sind.

1 Formulierung als lineares Programm

Gegeben seien r Angebotsorte $g_1, \dots, g_r \in \mathbb{R}^2$ und s Nachfrageorte $h_1, \dots, h_s \in \mathbb{R}^2$. In allen Angebotsorten wird dabei ein identisches Produkt hergestellt, wobei für $i = 1, \dots, r$ der Angebotsort g_i die Menge $u_i \geq 0$ produziert. In den Nachfrageorten h_j besteht jeweils eine Nachfrage von $w_j \geq 0$ für $j = 1, \dots, s$. Dabei nehmen wir der Einfachheit halber an, dass

$$\sum_{i=1}^r u_i = \sum_{j=1}^s w_j$$

gilt, sodass Angebot und Nachfrage jeweils genau ausgeglichen sind. Weiterhin definiert $c_{i,j} \geq 0$ die Transportkosten für einen Mengeneinheit des Produktes vom Angebotsort g_i zum Nachfrageort h_j .

Die Aufgabe besteht nun darin, alle Nachfrageorte gemäß der gegebenen Nachfrage durch die Angebotsorte zu beliefern und dabei die Transportkosten zu minimieren. Genau diese Aufgabe lässt sich durch folgendes lineares Programm beschreiben:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s c_{i,j} \cdot x_{i,j}, \quad \text{sodass} \quad & \sum_{i=1}^r x_{i,j} = w_j \quad \text{für } j = 1, \dots, s, \\ & \sum_{j=1}^s x_{i,j} = u_i \quad \text{für } i = 1, \dots, r, \\ & x_{i,j} \geq 0. \end{aligned}$$

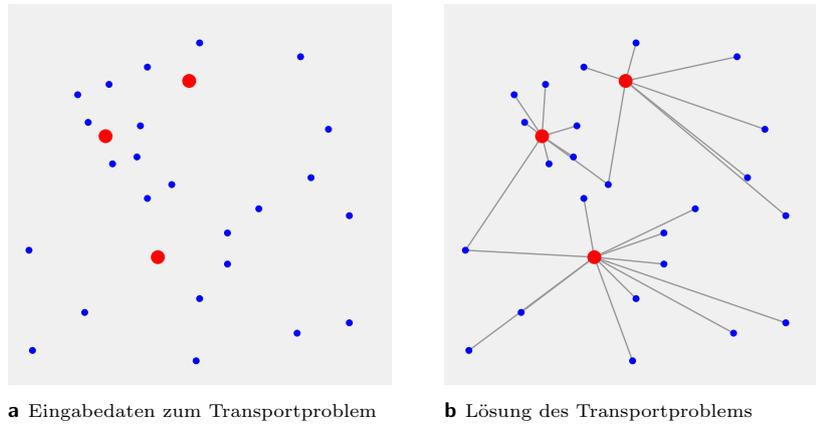


Abb. 1 Exemplarisches Beispiel zum Transportproblem mit $r = 3$ Angebotsorten (rot) sowie $s = 24$ Nachfrageorten (blau). **a** zeigt die zufällig gewählten Koordinaten der Standorte und **b** zeigt die Lösung des Problems. Dabei bedeutet eine Linie zwischen Angebots- und Nachfrageort, dass ein Gütertransport zwischen diesen Orten stattfindet

Dabei beschreibt $x_{i,j}$ die Menge, die vom Angebotsort i zum Nachfrageort j transportiert wird.

Wir erhalten also ein lineares Programm in Standardform mit $n = r \cdot s$ Variablen und $m = r + s$ Nebenbedingungen. Die ersten s Nebenbedingungen beschreiben dabei, dass die Nachfrage in jedem Nachfrageort vollständig erfüllt wird. Die anderen r Nebenbedingungen beschreiben, dass das Angebot in jedem Angebotsorte vollständig abgerufen wird.

Abb. 1 zeigt ein exemplarisches Beispiel zum Transportproblem mit $r = 3$ Angebotsorten sowie $s = 24$ Nachfrageorten.