Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 30. November 2016

Das Median-Kreis-Problem

Insbesondere in der Standortplanung gilt es Zielfunktionen zu untersuchen, welche sich häufig effizient mit dem geometrischen Branch-and-Bound minimieren lassen. Als Anwendungsbeispiel untersuchen wir daher das ***Median-Kreis-Problem*** in der Ebene.

1 Mathematische Formulierung des Problems

Gegeben seien s existierende Standorte $a_k \in \mathbb{R}^2$ für $k = 1, \ldots, s$. Das Problem besteht darin, einen Kreis derart zu platzieren, dass die Summe der Abstände zwischen den existierenden Standorten sowie dem Kreisbogen minimiert wird.

Da ein Kreis in der Ebene durch Mittelpunkt und Radius eindeutig spezifiziert werden kann, erhalten wir insgesamt ein Problem mit $n = 3$ Variablen. Genauer wird ein Kreis definiert durch $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, wobei $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ der Mittelpunkt und $x_3 \geq 0$ der Radius sei. Das Median-Kreis-Problem besteht nun darin, die Zielfunktion

$$f(x) \;=\; f(x_1, x_2, x_3) \;=\; \sum_{k=1}^{s} \Big| \|a_k - (x_1, x_2)\|_2 - x_3 \Big| \tag{1}$$

zu minimieren.

2 DC-Zerlegung

Bei der Zielfunktion (1) des Median-Kreis-Problems handelt es sich um eine DC-Funktion, d.h., es gibt zwei konvexe Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ mit

$$f(x) \;=\; g(x) - h(x)$$

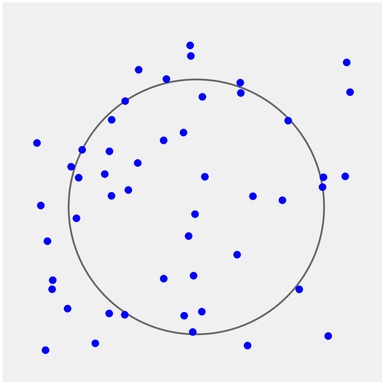

Abb. 1 Exemplarisches Beispiel zum Median-Kreis-Problem mit $s = 50$ existierenden Standorten (blaue Punkte) samt Optimallösung (grauer Kreis)

für alle $x \in \mathbb{R}^3$. Genauer können wir die DC-Zerlegung sogar explizit angeben:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^{s} 2 \cdot \max\Big\{ \|a_k - (x_1, x_2)\|_2 - x_3,\ 0 \Big\}, \\ h(x) &= \sum_{k=1}^{s} \Big(\|a_k - (x_1, x_2)\|_2 - x_3 \Big). \end{aligned}$$

3 Beispiel

Dank der DC-Zerlegung zuvor kann das geometrische Branch-and-Bound Verfahren mit der DC-Schrankenvorschrift zur Lösung des Median-Kreis-Problems angewandt werden. Ein Beispiel des Median-Kreis-Problems kann Abb. 1 entnommen werden.