

Problem des Handlungsreisenden

Anschaulich besteht das Problem des Handlungsreisenden oder das Traveling Salesman Problem darin, gegebene Punkte in der Ebene in einer Rundreise miteinander zu verbinden, wobei die Summe der Wege so kurz wie möglich sein soll. Abb. 1a veranschaulicht die kürzeste Rundreise anhand eines Beispiels mit $m = 15$ Orten unter Verwendung der Euklidischen Norm.

1 Formulierung als ganzzahliges Programm

Zunächst definieren wir die binären Variablen $x_{i,j} \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \dots, m-1$ und $j = i+1, \dots, m$ mit folgender Bedeutung:

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{der Weg zwischen } p_i \text{ und } p_j \text{ ist in der Tour enthalten} \\ 0 & \text{der Weg zwischen } p_i \text{ und } p_j \text{ ist nicht in der Tour enthalten} \end{cases}$$

Weiterhin führen wir für $i = 1, \dots, m$ die Nebenbedingungen

$$\sum_{k=1}^{i-1} x_{k,i} + \sum_{k=i+1}^m x_{i,k} = 2$$

ein, sodass jeder Ort genau einen eingehenden und einen ausgehenden Weg besitzt. Zusammenfassend erhalten wir damit das ganzzahlige Programm

$$\min \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_{i,j} \cdot x_{i,j}, \quad \text{sodass} \quad \sum_{k=1}^{i-1} x_{k,i} + \sum_{k=i+1}^m x_{i,k} = 2 \quad \text{für } i = 1, \dots, m, \\ x_{i,j} \in \{0, 1\}$$

bestehend aus

$$n = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (m-1)$$

binären Variablen und m Nebenbedingungen.

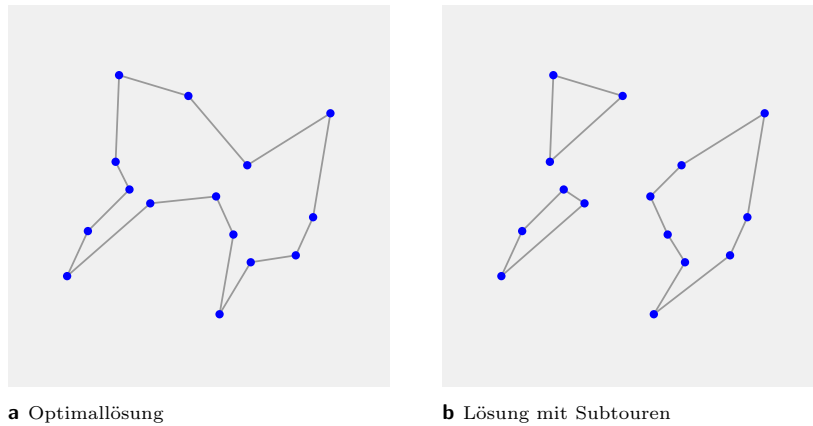


Abb. 1 Exemplarisches Beispiel zum Problem des Handlungsreisenden mit $m = 15$ Orten unter Verwendung der Euklidischen Norm

2 Subtour-Eliminationsbedingungen

Leider führt eine Optimallösung des ganzzahligen Programms in der Form zuvor im Allgemeinen noch nicht zur gesuchten kürzesten Reisetour, denn die Lösung kann aus mehreren *Subtours* bestehen (Abb. 1b).

Daher müssen dem ganzzahligen Programm *Subtour-Eliminationsbedingungen* hinzugefügt werden:

- (1) Zunächst wird das ganzzahlige Programm wie zuvor definiert ohne Subtour-Eliminationsbedingungen gelöst.
- (2) Falls die Optimallösung keine zusammenhängende Tour liefert, wird eine Subtour-Eliminationsbedingung hinzugefügt, welche eine der aktuellen Subtours verhindert.
- (3) Nun wird das ganzzahlige Programm mit Subtour-Eliminationsbedingung gelöst und es wird wieder überprüft, ob eine zusammenhängende Tour gefunden wurde.

Diese Schritte werden iterativ wiederholt, bis schließlich eine zusammenhängende Reisetour gefunden wird.