Daniel Scholz · www.taramath.de · daniel@taramath.de · 18. Mai 2016

Zwei-Personen Nullsummenspiele

In der Spieltheorie werden mathematische Modelle aufgestellt und analysiert, welche der Entscheidungsfindung dienen können. Als Spezialfall untersuchen wir ***Zwei-Personen Nullsummenspiele***, wobei für beide Spieler jeweils eine ***gemischte Strategie***, d.h. ein Wahrscheinlichkeitsvektor, zu berechnen ist.

1 Grundlagen

Wir beginnen mit einem Beispiel eines Zwei-Personen Nullsummenspiels.

Beispiel 1.1 *Das bekannte Spiel **Stein-Schere-Papier** ist ein sehr einfaches Zwei-Personen Nullsummenspiel. Beide Spieler wählen aus der gleichen Strategiemenge*

$$\{\text{Stein},\ \text{Schere},\ \text{Papier}\}$$

und als Auszahlung bedeutet eine 1*, dass Spieler 1 gewinnt. Das Spiel kann damit vollständig beschrieben werden durch die **Spielmatrix***

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dabei entspricht die Strategie von Spieler 1 einer Zeile der Matrix und die Strategie von Spieler 2 einer Spalte der Matrix. Der Ausgang der Spiels entspricht den Auszahlungen gemäß der Spielmatrix.

Jedes Zwei-Personen Nullsummenspiel wird somit eindeutig festgelegt durch die zugehörige Spielmatrix

$$A \;\in\; \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Zur Wahl der Strategie stellen wir folgende Grundannahme: Beide Spieler versuchen jeweils ihren schlimmsten Fall so gut wie möglich zu gestalten. Um einen stabilen Zustand erreichen zu können, werden ***gemischte Strategien*** zugelassen. Genauer sei

$$X \;=\; \Big\{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m \;:\; x \geq 0 \text{ und } x_1 + \ldots + x_m = 1\Big\}$$

die Menge aller gemischten Strategien von Spieler 1 mit folgender Bedeutung: Die gemischte Strategie $x = (x_1, \ldots, x_m)$ bedeutet, dass sich Spieler 1 mit einer Wahrscheinlichkeit von x_i für die Strategie i entscheiden wird. Die Menge der gemischten Strategien von Spieler 2 sei analog

$$Y \;=\; \Big\{y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n \;:\; y \geq 0 \text{ und } y_1 + \ldots + y_n = 1\Big\}$$

mit entsprechender Bedeutung. Wenn nun Spieler 1 eine Strategie $x \in X$ wählt und Spieler 2 eine Strategie $y \in Y$, so erhalten wir eine Auszahlung von

$$x^\top \cdot A \cdot y$$

an Spieler 1. Zusammenfassend ist Spieler 1 auf der Suche nach einer gemischten Strategie $x \in X$, welche gemäß der Grundannahme die Funktion

$$v(x) \;=\; \min\{x^\top \cdot A \cdot y \;:\; y \in Y\} \tag{1}$$

maximiert. Entsprechend ist Spieler 2 auf der Suche nach einer gemischten Strategie $y \in Y$, welche die Funktion

$$w(y) \;=\; \max\{x^\top \cdot A \cdot y \;:\; x \in X\} \tag{2}$$

minimiert.

2 Formulierung als lineares Programm

Die Besonderheit bei der Herleitung zuvor ist, dass die Optimierungsprobleme (1) und (2) auch als lineare Programme formuliert werden können. Ohne genaue Herleitungen geben wir hier nur das Ergebnis an: Gemäß der Grundannahme hat Spieler 1 eine gemischte Strategie x zu wählen, welche sich aus einer Optimallösung des folgenden linearen Progammes ergibt:

$$\begin{array}{lllrcll}
\max\ t, & & \text{sodass} & A^\top \cdot x - t \cdot e & \geq & 0, & \\
 & & & x_1 + \ldots + x_m & = & 1, & \\
 & & & x_i & \geq & 0 & \text{für alle } i \in \{1, \ldots, m\}, \\
 & & & t & \lesseqgtr & 0. &
\end{array}$$

Dabei gelte $t \in \mathbb{R}$ sowie $e = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$. Analog erhalten wir für Spieler 2 das lineare Programm

$$\begin{array}{lllrcll}
\min\ t, & & \text{sodass} & A \cdot y - t \cdot e & \leq & 0, & \\
 & & & y_1 + \ldots + y_n & = & 1, & \\
 & & & y_j & \geq & 0 & \text{für alle } j \in \{1, \ldots, n\}, \\
 & & & t & \lesseqgtr & 0. &
\end{array}$$

Beispiel 2.1 *Dank der Formulierung als lineares Programm sind wir nun in der Lage, ein Gleichgewicht im Stein-Schere-Papier Spiel zu berechnen.*

Die Optimallösungen der linearen Programme liefern die gemischten Strategien

$$x = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right) \qquad \text{und} \qquad y = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\right),$$

welche zu einem Gleichgewicht mit Auszahlung bzw. Zielfunktionswert

$$x^\top \cdot A \cdot y = 0$$

führen. Erwartungsgemäß erhalten wir für beide Spiele identische gemischte Strategien. Dies ist stets dann der Fall, wenn die Spielmatrix schiefsymmetrisch ist, d.h. falls

$$A = -A^\top$$

gilt.